

函数的性质

本章主要考查函数的基本性质，包括函数的定义域、值域、最值、奇偶性、单调性、周期性、反函数、图像的平移、二次函数、指数对数函数、幂函数。

2011 年

(9) 函数 $y = \frac{1}{x+1} + 1 (x > -1)$ 的反函数为 ()

(A) $y = \frac{1}{x-1} + 1 (x > 1)$ (B) $y = \frac{1}{x+1} + 1 (x > -1)$

(C) $y = \frac{1}{x+1} - 1 (x > -1)$ (D) $y = \frac{1}{x-1} - 1 (x > 1)$

(13) 若关于 x 的方程 $x^3 - x^2 + ax = 0$ 有重根，则 $a =$ _____.

(19) 设函数 $f(x) = |2x-3| + |x+2|$.

(I) 把 $f(x)$ 写成分段函数，并求 $f(x)$ 的最小值；(II) 解不等式 $f(x) < 5$.

2010 年

(15) 若函数 $f(x) = \frac{a^x}{1+a^x} - a$ 是奇函数，则 a 的值为_____.

(16) 设函数 $f(x) = x^2 + x + c, c > -1$. 若 $x_1 < x_2$, 且 $x_1 + x_2 = c$, 则 $f(x_1)$ 与 $f(x_2)$ 的大小关系为_____.

2009 年

(9) 函数 $y = f(x)$ 的图像与 $y = 2^x$ 的图像关于直线 $x + y = 0$ 对称，则 $f(x) =$ ()

(A) $-\log_{\frac{1}{2}}(-x)$ (B) $\log_{\frac{1}{2}}(-x)$ (C) $-\log_2 x$ (D) $\log_2 x$

(10) 设 $f(x) = 2 - ab + (a+b)x - x^2$, 若 $f(-2) = f(4) = 0$, 则以 a, b 为两根的二次方程可写为 ()

(A) $x^2 - 2x - 10 = 0$ (B) $x^2 - 2x - 6 = 0$ (C) $x^2 - 2x + 6 = 0$ (D) $x^2 + 2x - 10 = 0$

2008 年

(5) 设 $y = f(x)$ 是 R 上的奇函数, 当 $x \geq 0$ 时, $f(x) = x^3 + \lg(1+x)$, 则当 $x < 0$ 时, $f(x) = (\quad)$

(A) $-x^3 - \lg(1-x)$ (B) $x^3 + \lg(1-x)$

(C) $x^3 + \lg \frac{1}{(1-x)}$ (D) $-x^3 - \lg \frac{1}{(1-x)}$

点评: 此题考查函数的奇偶性, 定义法是判断奇偶性的唯一方法。

(12) 给定两点 $A(1,2)$ 、 $B(3,4)$, 若点 P 在 x 轴上移动, 则使 $\angle APB$ 达到最大的点 P 的横坐标为 ()

(A) -5 (B) 1 (C) 3 (D) 5

点评: 此题考查函数的应用, 引入变量建立函数关系, 求函数的最值。

2007 年

(6) 若函数 $y = e^x - 1$ 的图像按向量 $a = (1, 1)$ 平移后, 与 $f(x)$ 的反函数图像重合, 则函数 $f(x) = (\quad)$

(A) $\ln x + 1$ (B) $\ln(x+1)$ (C) $\ln x - 1$ (D) $\ln(x-1)$

点评: 此题考查函数的平移, 此类题有固定的结论。

(22) (本题满分 14 分)

设 $f(x) = x\sqrt{1-2x} (0 < x < \frac{1}{2})$, 证明 $f(x) \leq f(\frac{1-x}{2})$

点评: 此题至少有三种方法: 平分做差, 重要不等式的应用, 导数的应用。

2006 年

(3) 如果函数 $y = ax^3 + bx^2 + x$ 的图像经过点 $P(1, 2)$ 和 $Q(-1, 2)$, 则 $a^2 - b^2 =$ ()

- (A) 4 (B) 3 (C) -3 (D) -4

点评: 此题考查函数方程与函数图像的关系。

(7) 设函数 $f(x) = |x^2 - 1|$, 若 $0 < x < y$, 且 $f(x) = f(y)$, 则 ()

(A) $y = \sqrt{4 - x^2} (0 < x < \sqrt{2})$ (B) $y = \sqrt{4 - x^2} (0 < x < 2)$

(C) $y = \sqrt{2 - x^2} (0 < x < \sqrt{2})$ (D) $y = \sqrt{2 - x^2} (0 < x < 1)$

点评: 此题考查函数表达式的变换。

2005 年

(1) 设函数 $f(x) = 2^x - \frac{a}{2^x}$ 是偶函数, 则常数 $a =$ ()

- (A) 2 (B) -2
(C) 1 (D) -1

点评: 此题考查函数的奇偶性, 定义法是判断奇偶性的唯一方法。

(4) 方程 $x^{2+\lg x} = 1000$ 的解集为 ()

- (A) $\{1, -3\}$ (B) $\{10, 0.001\}$ (C) $\{10, 0.01\}$ (D) $\{10\}$

点评: 此题考查指数对数函数的解法。

(9) 函数 $y = \frac{2x}{2+x^2}$ 的值域是区间 ()

- (A) $\left[-\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right]$ (B) $\left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right]$ (C) $[-\sqrt{2}, \sqrt{2}]$ (D) $[-2, 2]$

点评: 此题考查函数的最值的求法, 此题可以用均值不等式、或导数。

(20) 设实数 x, y 满足 $x^2 + y^2 = 1$, 则 $x+y$ 的最大值为_____.

点评: 此题考查函数的最值的求法, 可用三角换元或均值不等式。

2004 年

14. 设 $f(x) = a - \frac{4}{2^x + 1}$ 是奇函数, 则常数 a 的值为_____.

点评: 此题考查函数的奇偶性,

25. (本题满分 10 分, 文史类考生不做)

设函数 $f(x) = |\lg x| (x > 0)$. 若 $a \neq b$, 并且 $f(a) = \frac{1}{2} f(b) = f(\frac{a+b}{2})$, 求 a 和 b 的值.

点评: 考查对数函数方程、绝对值方程的解法。

2003 年

2. 函数 $y = (x-2)^2 (x \leq 2)$ 的反函数是定义于区间 $[0, +\infty)$ 上的函数 ()

(A) $y = 2 + \sqrt{x}$

(B) $y = 2 - \sqrt{x}$

(C) $y = \sqrt{x} - 2$

(D) $y = 2 - \sqrt{x+2}$

点评: 考查反函数的求法。

3. 设函数 $y = f(x)$ 的图像与 $y = 2^x$ 的图像关于 y 轴对称, 则 ()

(A) $f(x) = 2^{-x}$

(B) $f(x) = -2^x$

(C) $f(x) = -2^{-x}$

(D) $f(x) = \log_2 x$

点评: 考查函数图像对称问题。

10. 若函数 $f(x) = 4ax - x^2$ 在区间 $[1, 3]$ 上是减函数, 则 a 的取值范围是 ()

(A) $\left[-\frac{1}{2}, +\infty\right)$

(B) $\left(-\infty, \frac{1}{2}\right]$

(C) $\left(-\infty, -\frac{3}{2}\right]$

(D) $\left[\frac{3}{2}, +\infty\right)$

点评: 考查函数的单调性, 求参数。

12. 已知 $f(x)$ 是周期为 2 的偶函数, 且当 $x \in (0,1)$ 时 $f(x) = x+1$, 那么当 $x \in (1,2)$ 时, $f(x) =$ ()
- (A) $1-x$ (B) $3-x$
(C) $x-3$ (D) $x+2$

点评: 考查函数解析式的变换问题。

27. (本小题满分 10 分, 理工农医类考生不做)

已知正整数 $n \geq 3$, 实数 $a_1 \neq 0$. 证明数列 a_1, a_2, \dots, a_n 是等比数列的充分必要条件为: 关于 x 的方程 $(a_1^2 + a_2^2 + \dots + a_{n-1}^2)x^2 - 2(a_1a_2 + a_2a_3 + \dots + a_{n-1}a_n)x + (a_2^2 + a_3^2 + \dots + a_n^2) = 0$ 有非零实根.

2002 年

4. 已知函数 $y = f(x)$ 的图像与 $y = x^3 + 1$ 的图像关于直线 $y = x$ 轴对称, 那么 $f(x) =$ ()
- (A) $\sqrt[3]{x} - 1$ (B) $\sqrt[3]{x} - 1$
(C) $\sqrt[3]{x} + 1$ (D) $\sqrt[3]{x} + 1$
6. 若函数 $f(x) = \lg(\sqrt{2x^2 + 1} + ax)$ 是奇函数, 则 $a =$ ()
- (A) 2 (B) ± 2
(C) $\sqrt{2}$ (D) $\pm\sqrt{2}$
12. 已知集合 $A = \{1, 2, 3, 4, 6\}$, 那么集合 $B = \left\{ x \mid x = \frac{b}{a}, a, b \in A \right\}$ 中所含元素的个数为 ()
- (A) 21 (B) 17
(C) 13 (D) 12
15. 函数 $y = \frac{1+3^{-x}}{1+3^x}$ 的值域是区间_____.

2001 年

10. 已知实数 x 、 y 满足 $\lg(x-y) + \lg(x+2y) = \lg 2 + \lg x + \lg y$, 则 $\frac{x}{y} =$ ()

- (A) $\frac{1}{2}$ (B) -1
(C) 2 (D) -1 或 2

12. 正数 a 、 b 、 c 满足 $2^a = 3^b = 5^c$, 则有 ()

- (A) $2a < 3b < 5c$ (B) $5c < 2a < 3b$
(C) $5c < 3b < 2a$ (D) $3b < 2a < 5c$

17. 由曲线 $y = \sqrt{8-x^2}$ 与 $y = |x|$ 所包围的区域之面积为_____.

18. 函数 $y = x^2 + \frac{4}{x^2+1}$ 的最小值为_____.

26. (本小题满分 10 分, 理工农医类考生不做)

已知二次函数 $f(x) = x^2 + px + q \geq f(4)$, 且 $f(2) = 0$, 求 $f(3)$ 的值.

2000 年

1. 函数 $y = \frac{x+3}{2x-1} (x \neq \frac{1}{2})$ 的反函数是 ()

- (A) $y = \frac{2x-1}{3x+3} (x \neq -3)$ (B) $y = \frac{x+3}{2x-1} (x \neq \frac{1}{2})$
(C) $y = \frac{3x+1}{2-x} (x \neq 2)$ (D) $y = \frac{x+3}{1-2x} (x \neq \frac{1}{2})$

2. 满足 $x^2 - \tan x = 0$ 的实数 x , 共有 ()

- (A) 1 个 (B) 2 个 (C) 3 个 (D) 无穷多个