2010年中华人民共和国普通高等学校
联合招收华侨、港澳地区、台湾省学生入学考试
数　学

考生注意：这份试卷共三个大题，所有考生做第一、二题，在第三（21、22、23）题中任选两题；报考理工农医类的考生做第三（24、25）题，报考文史类的考生做第三（26、27）题.

一、选择题：本大题共12小题；每小题5分，共60分.在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的，把所选项前的字母填在题后括号内.

（1）设集合 $P=\{1,2,3\}$，则满足 $P\cup Q=\{1,2,3,4\}$ 的不同集合 Q 共有

（A）1个　（B）4个　（C）6个　（D）8个

（2）若等差数列的前4项和 $S_4=\frac{2}{3}$，前6项和 $S_6=\frac{3}{2}$，则该数列的前10项和 $S_{10}=$

（A）$\frac{25}{6}$　（B）$\frac{19}{6}$　（C）$\frac{13}{6}$　（D）$\frac{8}{5}$

（3）设无穷等比数列 $\{a_n\}$ 的各项和为3，若 $a_1=2$，则 $a_2=$

（A）$\frac{1}{3}$　（B）$\frac{2}{5}$　（C）$\frac{2}{3}$　（D）$\frac{3}{2}$

（4）复数 $\frac{(2+i)^3(4-2i)}{5i(1+i)}=$

（A）$1-3i$　（B）$1-7i$　（C）$-1+3i$　（D）$-1+7i$

（5）函数 $f(x)=\frac{\sin 2x}{1+\cos 2x+8\sin^2 x}\left(0<x<\frac{\pi}{2}\right)$ 的最大值为

（A）$\frac{1}{4}$　（B）$\frac{1}{3}$　（C）$\frac{\sqrt{3}}{4}$　（D）$\frac{1}{2}$

（6）设 $\sin\theta-\cos\theta<\cos^3\theta-\sin^3\theta$，且 $|\theta|<\pi$，则 θ 的取值范围为

（A）$(-\pi,0)$　（B）$\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{4}\right)$　（C）$\left(-\frac{3\pi}{4},\frac{\pi}{4}\right)$　（D）$\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)$

（7）在平面直角坐标系 xOy 中，已知点 $M(4,2)$ 和 $N(-3,6)$，则 ΔOMN 的面积为

（A）$5\sqrt{3}$　　（B）15　　（C）$6\sqrt{5}$　　（D）30

（8）在正三棱柱 $ABC-A_1B_1C_1$ 中，侧棱 $A_1A=\sqrt{2}AB$，M、N 分别是 BC、CC_1 的中点，则异面直线 AB_1 与 MN 所成的角等于

（A）30°　　（B）45°　　（C）60°　　（D）90°

（9）用数字 1,2,3,4,5,6 组成的没有重复数字的 6 位数中，数字 1、2 相邻且 3、4 不相邻的 6 位数共有

（A）72 个　　（B）144 个　　（C）216 个　　（D）288 个

（10）一个口袋中，装有大小、轻重都无差别的 5 个红球和 4 个白球，每一次从袋中摸出两个球，若颜色不同，则为中奖. 每次摸球后，都将摸出的球放回口袋中，则 3 次摸球恰有 1 次中奖的概率为

（A）$\dfrac{80}{243}$　　（B）$\dfrac{100}{243}$　　（C）$\dfrac{80}{729}$　　（D）$\dfrac{100}{729}$

（11）设抛物线 $y^2=8x$ 的焦点为 F，倾斜角为锐角的直线 l 经过 F，且与抛物线相交于 A、B 两点. 若 F 是线段 AB 的一个 3 等分点，则 l 的斜率为

（A）$\dfrac{\sqrt{2}}{2}$　　（B）$\dfrac{\sqrt{3}}{2}$　　（C）$2\sqrt{3}$　　（D）$2\sqrt{2}$

（12）设 R 上的可导函数 $f(x)$ 满足 $f(x+y)=f(x)+f(y)+4xy$（x、$y\in R$），且 $f'(1)=2$，则方程 $f'(x)=0$ 的根为

（A）0　　（B）0, 2　　（C）$\dfrac{1}{2}$，$\dfrac{3}{2}$　　（D）$\dfrac{1}{2}$

二、填空题：本大题共 8 小题；每小题 4 分，共 32 分.把答案填在题中横线上.

（13）若方程 $9mx^2+y^2=9$ 表示的曲线是焦点在 y 轴上的椭圆，则常数 m 的取值范围为区间

________________.

（14）在极坐标系中，设两条曲线的方程分别为 $\rho=2$ 和 $\rho=2\sqrt{2}\cos\left(\theta-\dfrac{\pi}{4}\right)$，则两曲线交点的极坐标为__________________.

（15）若函数 $f(x)=\dfrac{a^x}{1+a^x}-a$ 是奇函数，则 a 的值为__________________.

（16）设函数 $f(x)=x^2+x+c, c>-1$. 若 $x_1<x_2$，且 $x_1+x_2=c$，则 $f(x_1)$ 与 $f(x_2)$ 的大小关系为

__________________.

(17) 双曲线的焦点为$(-6,0)$和$(6,0)$，两条准线的距离为8，则该双曲线的方程为________.

(18) 设多项式$p(x)=x^3+3x^2+ax+b$与$q(x)=x^4+x^3+ax^2+2x+b$有公因式$x+3$，则$p(x)$与$q(x)$的最大公因式为________________.

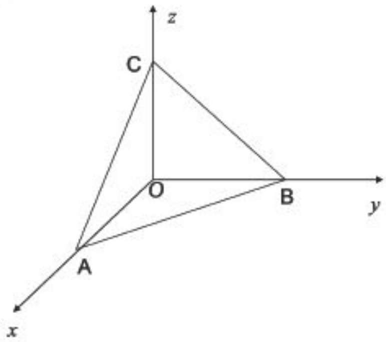
(19) 从5对夫妻中，选派4人参加社会调查，则4人中至少有一对夫妻的概率为________.

(20) 设A、B、C是球面上的三个点，每两点间的球面距离都等于该球大圆周长的$\frac{1}{6}$，若经过A、B、C的圆的周长为$4\pi\ cm$，则该球的表面积为_____________cm^2.

三、解答题：在第21、22、23题三个题目中任选两题做答.在第24、23、26、27这四个题目中按考生报考专业的类别完成两题.

(21) (本题满分14分)

如图，在空间直接坐标系$O-xyz$中，平面π与x、y、z轴的正半轴分别交与点A、B、C. 三棱锥$O-ABC$的体积等于9，二面角$A-BC-O$与$B-AC-O$相等，且$\cos\angle ACB=\frac{1}{3}$. 求平面$\pi$的方程.



（22）（本题满分 14 分）

设函数 $f(x)=2+\sin\left(3x+\frac{\pi}{12}\right)\cos\left(x+\frac{\pi}{6}\right)+\cos\left(3x+\frac{\pi}{12}\right)\sin\left(x+\frac{\pi}{6}\right)$.

（Ⅰ）求函数 $f(x)$ 的图像离原点 O 最近的对称中心的坐标，以及离 y 轴最近的对称轴的方程；

（Ⅱ）求函数 $f(x)$ 的最小正周期，并用作图法求方程 $f(x)-x-1=0$ 的根的个数.

（23）（本题满分 14 分）

在数列 $\{a_n\}$ 中，已知 $a_1=1, a_2=4$，当 $n\geq 3$ 时，$a_n=3a_{n-1}-2a_{n-2}$.

（Ⅰ）求 $\{a_n\}$ 的通项公式；

（Ⅱ）求 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{2^n}{a_n}$.

(24)（本题满分 15 分，文史类考生不做）

设 AB 是圆 $O: x^2+y^2=9$ 的动弦，$|AB|=3$，定点 $C(c,0)$ 和动点 P 满足 $\overrightarrow{PA}+\overrightarrow{PB}+3\overrightarrow{PC}=0$.

（Ⅰ）求点 P 的轨迹 F；

（Ⅱ）求 c 的值，使 F 与圆 O 恰有一个公共点.

(25)（本大题 15 分，文史类考生不做）

设 $f(x)=x^2-2x+a\ln x(x>0)$ 不是单调函数，且无最小值.

（Ⅰ）求常数 a 的取值范围；

（Ⅱ）设 x_0 是函数 $f(x)$ 的极值点，证明 $-\dfrac{3+\ln 4}{4}<f(x_0)<0$.

（26）（本题满分 15 分，理工农衣类考生不做）

设 AB 是圆 $O:x^2+y^2=9$ 的动弦，$|AB|=3$，$C(5,0)$，动点 P 满足 $\overrightarrow{PA}+\overrightarrow{PB}+3\overrightarrow{PC}=0$，点 M 是 AB 的中点.

（Ⅰ）证明 $\overrightarrow{PM}$ 与 $\overrightarrow{PC}$ 共线；

（Ⅱ）求点 P 的轨迹，并说明所表示的是什么曲线.

（27）（本题满分 15 分，理工农衣类考生不做）

设 $f(x)=ax-\ln x(x>0)$ 在 $x=x_0$ 处所取得最小值 2

（Ⅰ）求 a 和 x_0 的值；

（Ⅱ）设 x_1、x_2 是任意正数，证明 $f(x_1)+f(x_2)\geq 2f\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right)$，当且仅当 $x_1=x_2$ 时，等号成立