

导数性质及应用

2010 年

(12) 设 R 上的可导函数 $f(x)$ 满足 $f(x+y) = f(x) + f(y) + 4xy$ ($x, y \in R$), 且 $f'(1) = 2$, 则方程 $f'(x) = 0$ 的根为 ()

- (A) 0 (B) 0, 2 (C) $\frac{1}{2}, \frac{3}{2}$ (D) $\frac{1}{2}$

(25) (本大题 15 分, 文史类考生不做)

设 $f(x) = x^2 - 2x + a \ln x$ ($x > 0$) 不是单调函数, 且无最小值.

(I) 求常数 a 的取值范围; (II) 设 x_0 是函数 $f(x)$ 的极值点, 证明 $-\frac{3+\ln 4}{4} < f(x_0) < 0$.

(27) (本题满分 15 分, 理工农医类考生不做)

设 $f(x) = ax - \ln x$ ($x > 0$) 在 $x = x_0$ 处所取得最小值 2

(I) 求 a 和 x_0 的值;

(II) 设 x_1, x_2 是任意正数, 证明 $f(x_1) + f(x_2) \geq 2f\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right)$, 当且仅当 $x_1 = x_2$ 时, 等号成立.

2009 年

(11) 若函数 $f(x) = x^2 - 4x + \frac{a}{x}$ 在区间 $(1, +\infty)$ 是增函数, 则常数 a 的取值范围为 ()

- (A) $(-\infty, -2]$ (B) $(-\infty, -\frac{27}{4}]$ (C) $(-\infty, -\frac{64}{27}]$ (D) $(-\infty, -\frac{32}{27}]$

(21) (本题满分 14 分)

曲线 $x^2y = 8$ 按向量 $e = (1, 2)$ 平移后得到的曲线 C 与直线 $l: 2x + y = a$ 相切, 求 a 的值以及 C 与 l 公共点的坐标。

2008 年

(4) 若直线 l 与曲线 $xy = 6$ 相切于点 $p(2, 3)$, 则直线 l 的斜率为 ()

- (A) $\frac{3}{2}$ (B) $\frac{3}{4}$ (C) $-\frac{3}{4}$ (D) $-\frac{3}{2}$

(6) 函数 $f(x) = x^3 - 12x + 3$ ($-3 \leq x \leq 3$) 的值域为区间 ()

- (A) $[-13, 19]$ (B) $[-13, 21]$ (C) $[-6, 12]$ (D) $[-6, 19]$

(26) (本题满分 15 分, 理工类考生不做)

设函数 $f(x) = \frac{x}{3} - \ln(\sqrt[3]{x})$ ($x > 0$), 数列 $\{a_n\}$ 的首项 $a_1 > 1$ 且 $a_1 \neq 0$, 当 $n \geq 2$ 时, $a_n = 3f(a_{n-1})$

(I) 求函数 $f(x)$ 的最小值以及对应的 x 值; (II) 证明: 当 $n \geq 2$ 时, 都有 $a_n > a_{n+1} > 1$.

2007 年

(12) 已知 $f(x)$ 是 \mathbb{R} 上的可导函数, 下列陈述中正确的是 ()

(A) 若 $f'(x)$ 是偶函数则 $f(x)$ 是偶函数 (B) 若 $f'(x)$ 是偶函数则 $f(x)$ 是奇函数

(C) 若 $f'(x)$ 是奇函数则 $f(x)$ 是奇函数 (D) 若 $f'(x)$ 是奇函数则 $f(x)$ 是偶函数

(18) 函数 $y = x^3 + 3ax^2 + 3bx$ 在区间 $[-1, 1]$ 单调减少, 且 $a > 0$, 则 $2a + b$ 的最大值为_____.

(21) (本题满分 14 分)

设函数 $f(x) = x^3 + 3x^2 + ax + b$, 实数 a, b 是常数.

(I) 若曲线 $y = f(x)$ 的任意切线斜率都不小于 -2 , 则 a, b 的取值范围如何?

(II) 证明曲线 $y = f(x)$ 是中心对称图形; 并求出对称中心的坐标.

2006 年

(12) 已知 $f(x)$ 和 $g(x)$ 是 \mathbf{R} 上的可导数, 对任意实数 x , 都有 $f(x)g(x) \neq 0$ 和

$f(x)g'(x) > f'(x)g(x)$, 那么, 当 $a < x < b$ 时, 必有 ()

(A) $f(b)g(x) > f(x)g(b)$ (B) $f(x)g(x) > f(a)g(a)$

(C) $f(x)g(b) > f(b)g(x)$ (D) $f(x)g(a) > f(a)g(x)$

(25) (本题满分 15 分, 文史类考生不做)

设函数 $f(x) = x - \ln(x+1)$ ($x > -1$). (I) 求函数 $f(x)$ 的单调区间和最小值;

(II) 又设 $0 < a - b < 1 \leq a + b$, 求证: $0 < a \ln \frac{2a}{a+b} + b \ln \frac{2b}{a+b} < \ln 2$

(27) (本题满分 15 分, 理工类考生不做)

设正数 x, y 满足 $2x^2 + y^2 - 4x = 0$. (I) 求 x 的取值范围; (II) 求 $\lg x + \lg y$ 的最大值;

2005 年

(24) (本题满分 15 分, 文史类考生不做)

求函数 $f(x) = 5x - 4\sqrt{x^2 + x}$ ($x \geq 0$) 的单调区间和值域.

(26) (本题满分 15 分, 理工类考生不做)

求函数 $f(x) = x^3 - 3x^2 - 9x + 5$ ($0 \leq x \leq 4$) 的值域.