2007年中华人民共和国普通高等学校

联合招收华侨、港澳地区、台湾省学生入学考试

数学试题参考答案和评分参考

说明：

一、　本解答给出了一种或几种解法供参考，如果考生的解法与本解答不同，可根据试题的主要考查内容比照评分参考制定相应的评分细则.

二、　对计算题，当考生的解答在某一步出现错误时，如果后继部分的解答未改变该题的内容和难度，可视影响的程度决定后继部分的给分，但不得超过该部分正确解答应得分数的一半；如果后继部分的解答有较严重的错误，就不再给分.

三、　解答右端所注分数，表示考生正确做到这一步应得的累加分数.

四、　只给整数分数.选择题和填空题不给中间分.

五、　所有考生做第一、第二题，在第三（21、22、23）题中任选两题；报考理工农医类考生做第三（24、25）题，报考史文类考生做第三（26、27）题.

一、选择题：每小题选对给5分，不选、选错或者选出的代号超过一个，一律给零分.

（1）B　(2) C　(3) D　(4) A　(5)　A　(6)　A

(7) B　(8) D　(9) C　(10) B　(11)　C　(12)　D

二、填空题：每一个小题满分4分，只要求直接填写结果

(13) $\frac{15}{4}$　(14) $\sqrt{\ }$　(15) $\pm$　(16) $\rho=\frac{b}{\sin\theta-k\cos\theta}$

(17) $\frac{18}{4}$　(18) $-$　(19)　(20) $\frac{\sqrt{13}+}{2}$

三、解答题：

（21）本题满分14分.

解：（I）求导得 $f'(x)=3x^2+6x+a=3(x+1)^2+(a-3)$.

所以对任意 $x\in R, f'(x)\ge -2$ 等价于 $a-3\ge -2$，即得 a 的取值范围 $a\ge 1$ ····3分

由于 b 对曲线 $y=f(x)$ 的切线斜率无影响，故 b 的取值范围为整个实数集R.　····6分

(II)当 $x=-1$ 时，$f'(x)$ 取最小值.设点 $M(-1,f(-1))$，将曲线 $y=f(x)$ 按向量 $\overline{MO}$ 平移后曲线在新的位置上，对应的方程为 $y+f(-1)=f(x-1)$ ·········10 分

即 $y=x^3+(a-3)x$，它是奇函数，其图像关于原点 O 对称，所以曲线 $y=f(x)$ 关于点 M 中心对称，对称中心 M 的坐标是 $x=-1, y=2-a+b$ ·····14 分

（22）本大题 14 分

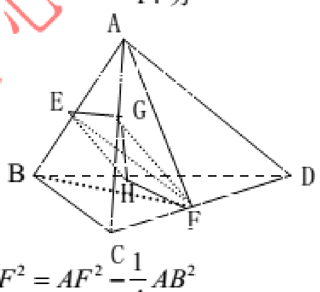
解：$f(x)=x\sqrt{1-2x}=\sqrt{x}\sqrt{x(1-2x)},$ ····4 分

而 $\sqrt{x(1-2x)}\le\dfrac{1-2x+x}{2}=\dfrac{1-x}{2}$， ·······8 分

又 $f(\dfrac{1-x}{2})=\dfrac{1-x}{2}\sqrt{1-2\times\dfrac{1-x}{2}}=\dfrac{1-x}{2}\bullet\sqrt{x}$ ·······12 分

所以 $f(x)\le f(\dfrac{1-x}{2})$. ·····14 分

（23）本大题 14 分



解：（I）连接 $AF,BF,$，由题设可知，$\Delta ACD\cong\Delta BDC$，作为全等三角形对应边上的中线，有 $AF=BF$， ····3 分

因为 EF 为等腰三角形底边中线，所以 $EF\perp AB$, 且, $EF^2=AF^2-\dfrac{1}{4}AB^2$

由余弦定理 $AF^2=\dfrac{1}{2}(AC^2+AD^2)-\dfrac{1}{4}CD^2,$

因此 $EF^2=\dfrac{1}{2}(AC^2+AD^2-AB^2)=\dfrac{1}{2}(144+100-64),$ ·····5 分

故 $EF=3\sqrt{10}$ ······7 分

(II)连接 $EG.EH,FG,FH$ 因 $EG/\!/BC,FH/\!/BC,$ 所以 $FG/\!/BC,$ E,F,G,H 共面。 ··10 分

且 $EG=FH=\dfrac{1}{2}BC,EH=FG=\dfrac{1}{2}AD$

又由题设知 $AD=BC$,所以 $EG=FH=EH=FG,$ ··········12 分

故 四边形 $GEHF$ 是菱形，所以 EF,GH 互相垂直平分. ········14 分

（24）本题满分 15 分

解（I）当抽出的 2 件产品都是正品时，该批产品通过抽检，

10 件产品中有九件是正品，因此通过抽检的概率是 $p=\dfrac{C_9^2}{C_{10}^2}=80\%$

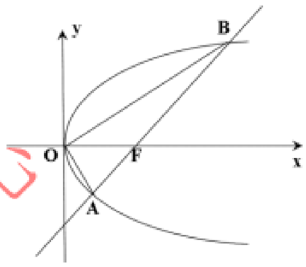
(II) 设该批产品中有 m 件正品，则通过抽检的概率为 $P=\dfrac{m(m-1)}{10\times 9}$

依题目要求 $p\ge\dfrac{1}{2}$， 所以 $m(m-1)\ge 45$ 解不等式得：$m\le\dfrac{1-\sqrt{181}}{2}$（舍）或 $m\ge\dfrac{1+\sqrt{181}}{2}$

注意到 $13<\sqrt{181}<14, m$ 是整数，所以 $m\ge 8$

故当该批产品它通过抽检得概率不低于 50%时，其次品最多有 2 件.……15 分

（25）本题满分 15 分



解(I) $S_{\Delta AOB}=\dfrac{p(y_B-y_A)}{4}$ 由 $AB=AF+FB=x_A+x_B+p$

得 $y_B-y_A=\dfrac{|k|}{\sqrt{1+k^2}}AB=\dfrac{|k|}{\sqrt{1+k^2}}(x_A+x_B+p)$

(1) ……3 分

由` $\begin{cases} y^2=2px; \\ y=k(x-\dfrac{p}{2}) \end{cases}$ 得 $2px=k^2(x-\dfrac{p}{2})^2$ 即

$k^2x^2-p(k^2+2)x+\dfrac{k^2p^2}{4}=0$

此方程二根为 x_A、x_B，韦达定理可知 $x_A+x_B=p(1+\dfrac{2}{k^2}), x_Ax_B=\dfrac{p^2}{4}$， （2）…5 分

$S_{\Delta AOB}=\dfrac{p}{4}\dfrac{|k|}{\sqrt{1+k^2}}AB=\dfrac{p^2\sqrt{1+k^2}}{2|k|}$， …7 分

(II) $\tan\angle AOB=\tan(\angle AOX+\angle XOB)=\dfrac{\tan\angle AOX+\tan\angle XOB}{1-\tan\angle AOX\tan\angle XOB}$

$=\dfrac{-\dfrac{y_A}{x_A}+\dfrac{y_B}{x_B}}{1+\dfrac{y_Ay_B}{x_Ax_B}}=\dfrac{-y_Ax_B+y_Bx_A}{x_Ax_B+y_Ay_B}=\dfrac{\dfrac{1}{2p}(-y_B+y_A)}{\dfrac{y_Ay_B}{4p^2}+1}$ ``````````10 分

``````````12 分

因 $y_A{}^2y_B{}^2=4p^2x_Ax_B$ 及 $y_Ay_B<0$,由（2）知：$y_Ay_B=-p^2$,

又由（1）与（2） $y_B-y_A=2p\sqrt{1+\dfrac{1}{k^2}}$ ， 综上 $\tan\angle AOB=-\dfrac{4}{3}\sqrt{1+\dfrac{1}{k^2}}$. …15 分
``````````

（26）本题满分 15 分

解（I）当抽出的 2 件产品是正品时，该批产品通过抽检，10 件产品中有 9 件是正品，因此通过抽检的概率是 $p=\dfrac{C_9^2}{C_{10}^2}=80\%$ …………7 分

(II) 设该批产品中有 m 件正品，则通过抽检的概率为 $p=\dfrac{m(m-1)}{10\times 9}$

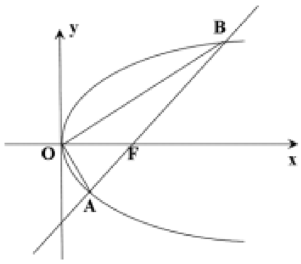
以题目要求 $p=\dfrac{1}{3}$，　所以 $m(m-1)=30$　解方程得 $m=-5$（舍），$m=6$

所以当该批产品通过抽检得概率为 $\dfrac{1}{3}$ 时，其中有 4 件次品.　……15 分

（27）本题满分 15 分

解：(I) $S_{\Delta AOB}=\dfrac{(y_B-y_A)}{2}$

由　$AB=AF+FB=x_A+x_B+2$



得 $y_B-y_A=\dfrac{|k|}{\sqrt{1+k^2}}AB=\dfrac{|k|}{\sqrt{1+k^2}}(x_A+x_B+2)$

由 $\begin{cases} y^2=4x; \\ y=k(x-1) \end{cases}$ 得 $4x=k^2(x-1)^2$，即 $x^2-2(1+\dfrac{2}{k^2})x+1=0$

此方程二根为 x_A、x_B，韦达定理可知

$x_A+x_B=2(1+\dfrac{2}{k^2}), x_Ax_B=1$　(2)　……5 分

$S_{\Delta AOB}=\dfrac{1}{2}\dfrac{|k|}{\sqrt{1+k^2}}(x_A+x_B+2)=\dfrac{2\sqrt{1+k^2}}{|k|}$,　……7 分

(II) $\tan\angle AOB=\tan(\angle AOX+\angle XOB)=\dfrac{\tan\angle AOX+\tan\angle XOB}{1-\tan\angle AOX\tan\angle XOB}$

$$=\frac{-\frac{y_A}{x_A}+\frac{y_B}{x_B}}{1+\frac{y_Ay_B}{x_Ax_B}}=\frac{-y_Ax_B+y_Bx_A}{x_Ax_B+y_Ay_B}=\frac{\frac{1}{4}(-y_B+y_A)}{\frac{y_Ay_B}{16}+1}$$ ……12 分

因 $y_A{}^2y_B{}^2=4x_Ax_B$ 及 $y_Ay_B<0$，由（2）知：$y_Ay_B=-4$

又由（1）与（2）$y_B-y_A=4\sqrt{1+\dfrac{1}{k^2}}$

综上　$\tan\angle AOB=-\dfrac{4}{3}\sqrt{1+\dfrac{1}{k^2}}$.　…………15 分