# 2002年数学试题参考答案

## 北京博飞教育中心独家奉献

**一、选择题：每个小题选对给3分，不选、选错或者选出的代号超过一个，一律给0分.**

1．B　　2．D　　3．C　　4．B　　5．A　　6．D

7．A　　8．B　　9．D　　10．D　　11．C　　12．C

**二、填空题：每一个小题满分3分，只要求直接填写结果.**

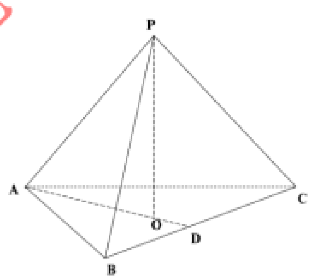
13．$\frac{x-1}{2}=\frac{y+1}{-2}=\frac{z-2}{3}$　　14．$\frac{\pi}{4}$　　15．$(0,+\infty)$　　16．$\frac{21}{2}$

17．$40\pi$　　18．12　　19．6　　20．$x+4$

**三、解答题：**

**21．本题满分10分.**

**解：** 过$P$作$PO\perp$底面$ABC$，$O$是垂足；结$AO$，则$\angle PAO$是侧棱与底面所成的角，依设，$\angle PAO=60^\circ$.




由正三棱锥性质，得$O$是正三角形$ABC$的中心.

延长$AO$交$BC$于$D$，则

$$AD=\frac{\sqrt{3}}{2}AB=\frac{\sqrt{3}}{2}a,\ AO=\frac{2}{3}AD=\frac{\sqrt{3}}{3}a,$$

$$PO=AO\bullet\tan\angle PAO=\frac{\sqrt{3}}{3}a\tan 60^\circ=a,$$

所以，三棱锥$P-ABC$的体积为

$$V=\frac{1}{3}PO\bullet S_{\Delta ABC}=\frac{a}{3}\times\frac{\sqrt{3}}{4}a^2=\frac{\sqrt{3}}{12}a^3.$$

**22．本题满分10分.**

**解：** 设直线$l$的斜率为$k$，依题意，$k\succ 0$，且$l$方向的单位向量为

$$e=\left(\frac{1}{\sqrt{1+k^2}},\frac{k}{\sqrt{1+k^2}}\right).$$

依题设$|\overline{OA}\bullet e|=|\overline{OB}\bullet e|$，　得$|1+3k|=|-3+k|$

即　$1+3k=-3+k$，　　①

或　$1+3k=3-k$，　　②

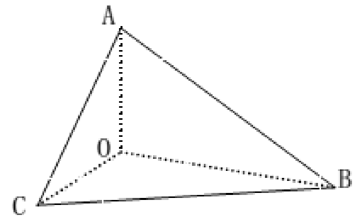
由①得 $k=-2$（舍去），由②得 $k=\frac{1}{2}$．所以，$l$ 的斜率为 $\frac{1}{2}$．

**23．本题满分 10 分.**

**解：** 如图，面 $BCO$ 表示海平面，$O$ 是从 $A$ 向海平面作垂线的垂足.

依题设，$AO=h(m)$，

$\angle ABO=30^{\circ},\angle ACO=45^{\circ},\angle BOC=150^{\circ}$.




且有 $AO\perp BO,AO\perp CO,$ 所以

$BO=AO\bullet\cot\angle ABO=h\cot 30^{\circ}=\sqrt{3}h$，

$CO=AO\bullet\cot\angle ACO=h\cot 45^{\circ}=h$.

在ΔBOC 中，应用余弦定理，得

$$BC^2=BO^2+CO^2-2BO\bullet CO\bullet\cos\angle BOC=3h^2+h^2-2\sqrt{3}h^2\cos 150^{\circ}=7h^2,$$

所以，$B$ 、$C$ 两船的距离为 $BC=\sqrt{7}h(m)$.

**24．本题满分 10 分.**

**证：** 原不等式等价于 $\frac{2}{3}\bullet\frac{4}{5}\bullet\cdots\cdots\bullet\frac{2n}{2n+1}>\frac{\sqrt{2n+3}}{2n+2}$.

下面用数学归纳法证明此不等式对任意正整数 $n$ 成立.

（1）当 $n=1$ 时，左端 $=\frac{2}{3}$，右端 $=\frac{\sqrt{5}}{4}$，

$\because 64>45$，$\therefore 8>3\sqrt{5}$，即 $\frac{2}{3}>\frac{\sqrt{5}}{4}$，

故当 $n=1$ 时，不等式成立.

（2）假设 $n=k\geq 1$ 时，不等式成立，即 $\frac{2}{3}\bullet\frac{4}{5}\bullet\cdots\cdots\bullet\frac{2k}{2k+1}>\frac{\sqrt{2k+3}}{2k+2}$，

$$\therefore \frac{2}{3}\bullet\frac{4}{5}\bullet\cdots\cdots\bullet\frac{2k}{2k+1}\bullet\frac{2(k+1)}{2(k+1)+1}>\frac{\sqrt{2k+3}}{2k+3}=\frac{\sqrt{2k+5}}{\sqrt{(2k+3)(2k+5)}},$$

$$\because \sqrt{(2k+3)(2k+5)}<\frac{1}{2}[(2k+3)+(2k+5)]=2(k+1)+2,$$

$$\therefore \frac{2}{3}\bullet\frac{4}{5}\bullet\cdots\cdots\bullet\frac{2k}{2k+1}\bullet\frac{2(k+1)}{2(k+1)+1}>\frac{\sqrt{2(k+1)+3}}{2(k+1)+2},$$

即当 $n=k+1$ 时，不等式也成立.

综合（1）、（2）得不等式对任意正整数$n$都成立.

**25．本题满分 10 分.**

**解：**依题意，可设直线$AB$的方程为$y=kx+1$，

与方程$y^2=4x$联立，有两组不同的实数解$(x_1,y_1)$和$(x_2,y_2)$，分别为点$A$和$B$的坐标，

所以二次方程$k^2x^2+(2k-4)x+1=0$

有相异实根$x_1$和$x_2$，从而，$k\neq 0$且判别式

$\Delta=(2k-4)^2-4k^2=16-16k>0$，$\therefore k<1$且$k\neq 0$.

记线段$AB$的中点为$M(x,y)$，则

$$\begin{cases} x=\dfrac{x_1+x_2}{2}=-\dfrac{2k-4}{2k^2}=\dfrac{2-k}{k^2}, \\ y=kx+1=\dfrac{2}{k}. \end{cases}$$

由$k$的取值范围得：

当$k<0$时，$x>0, y<0$；

当$0<k<1$时，$x>1, y>2$.

所以，得点$M$的轨迹方程为$2x+y-y^2=0$，

其中$y$的取值范围为$(-\infty,0)\bigcup(2,+\infty)$.

**26．本题满分 10 分.**

**解：**原不等式同解于$\log_2\left|\dfrac{x+1}{x-1}\right|<1$，即$0<\left|\dfrac{x+1}{x-1}\right|<2$.

将其化为不等式组

$$\begin{cases} \dfrac{x+1}{x-1}<2, & ① \\ \dfrac{x+1}{x-1}>-2, & ② \\ x\neq -1. & ③ \end{cases}$$

解①得$x>3$或$x>1$；

解②得$x<\dfrac{1}{3}$或$x>1$.

综合得原不等式的解集为$\left\{x \middle| x \neq -1, 且 x < \dfrac{1}{3} 或 x > 3\right\}$.

**27．本题满分 10 分.**

**解：**设公切圆的圆心坐标为$(a,b)$，半径为$r$，则$r>0$，且由题设得

$$\begin{cases} 2a-b=4, & ① \\ a^2+b^2=(r+3), & ② \\ (a-6)^2+b^2=(r+1 & ③ \end{cases}$$

由②式减③式，整理得

$r=3a-1$ .　　④

由$r>0$得$3a-11>0$，即$a>\dfrac{11}{3}$，

将④式代入②式，得$a^2+b^2=(3a-8)^2$

与①式联立，消去$b$得$a^2=(3a-8)^2-(2a-4)^2$，

$\therefore a^2-8a+12=0$，即$(a-2)(a-6)=0$，

$\because a>\dfrac{11}{3}>3$，$\therefore a=6$，得$b=2a-4=8, r=3a-11=7$.

从而，得所求公切圆的方程为$(x-6)^2+(y-8)^2=49$.